Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Финальный тренировочный вариант №432 (32)

«Штурм мозга перед ЕГЭ»

(совместный проект alexlarin.net и egemathschool.ru)

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

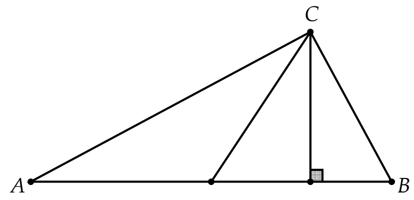
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1-11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

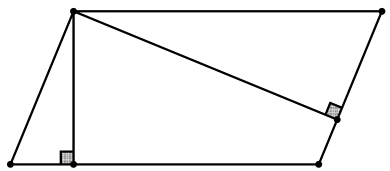
1

1.1 Острые углы прямоугольного треугольника равны 62° и 28°. Найдите угол между высотой и медианой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



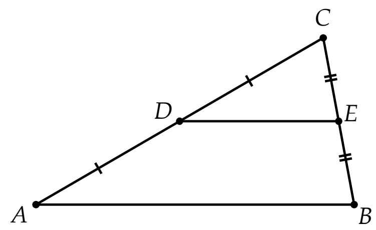
Ответ: ________________________.

1.2 Стороны параллелограмма равны 24 и 27. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 18. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.



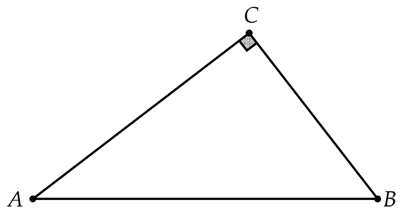
Ответ: ________________________.

1.3 Площадь треугольника ABC равна 24, DE – средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции ABED.



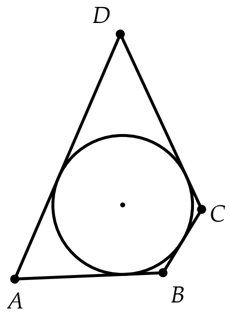
Ответ: ________________________.

1.4 В треугольнике ABC угол C равен 90°, AB=30, AC= $3\sqrt{19}$. Найдите $\sin A$.



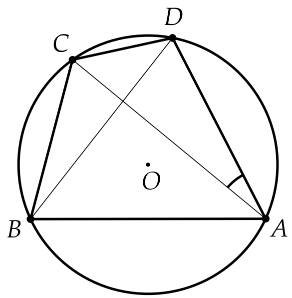
Ответ: ________________________.

1.5 В четырёхугольник ABCD вписана окружность, AB=57, CD=31. Найдите периметр четырёхугольника ABCD.



Ответ: ________________________.

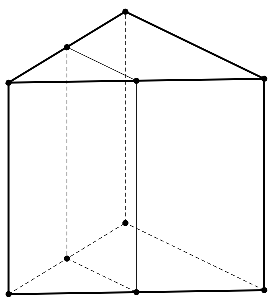
1.6 Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 102°, угол ABD равен 56°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



Ответ: ________________________.

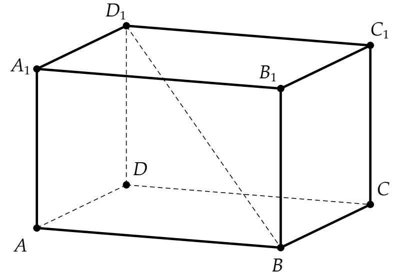
2

2.1 Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 37. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



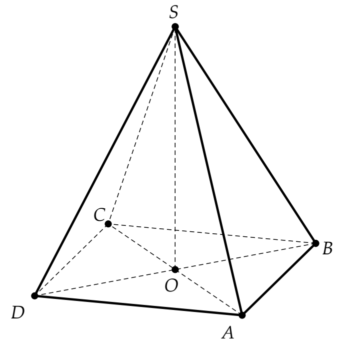
Ответ: ________________________.

2.2 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что BB_1=8, CD=8, AD=14. Найдите длину диагонали BD_1.



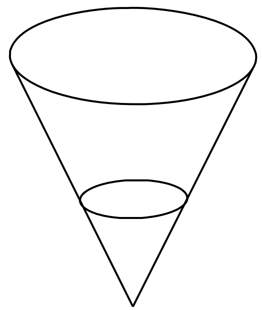
Ответ: ________________________.

2.3 В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD с вершиной S точка O – центр основания, SO=15, BD=40. Найдите длину отрезка SA.



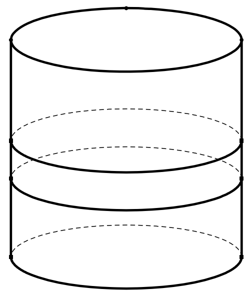
Ответ: ________________________.

2.4 В сосуде, имеющем форму конуса, уровень жидкости достигает $\frac{2}{3}$ высоты. Объём жидкости равен 144 мл. Сколько миллилитров жидкости нужно долить, чтобы полностью наполнить сосуд?



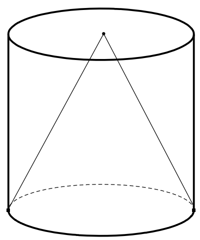
Ответ: ________________________.

2.5 В цилиндрический сосуд налили 1200 см^3 воды. Уровень жидкости оказался равным 12 см. В воду полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 10 см. Найдите объём детали. Ответ выразите см^3.



Ответ: ________________________.

2.6 Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём цилиндра, если объём конуса равен 45.



Ответ: _________________________.

3

3.1 Фабрика выпускает сумки. В среднем 4 сумки из 200 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

Ответ: _________________________.

3.2 В группе туристов 10 человек. С помощью жребия они выбирают пятерых человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Ответ: _________________________.

3.3 На олимпиаде по математике 550 участников разместили в четырёх аудиториях. В первых трёх удалось разместить по 110 человек, оставшихся перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ: _________________________.

3.4 В школе 51 пятиклассник, среди них – Саша и Настя. Всех пятиклассников случайным образом делят на три группы, по 17 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Саша и Настя окажутся в одной группе.

Ответ: _________________________.

3.5 Перед началом футбольного матча судья бросает монету, чтобы определить, какая из команд начнет игру с мячом. Команда «Физик» играет три матча с разными командами. Найдите вероятность того, что в этих играх «Физик» выиграет жребий ровно два раза.

Ответ: _________________________.

3.6 Перед началом первого тура чемпионата по шашкам участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 спортсменов, среди которых 13 спортсменов из России, в том числе Андрей Фомин. Найдите вероятность того, что в первом туре Андрей Фомин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

Ответ: _________________________.

4

4.1 При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 815 г, равна 0,98. Вероятность того, что масса окажется больше 785 г, равна 0,86. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 785 г, но меньше 815 г.

Ответ: _________________________.

4.2 Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не вы пало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 9».

Ответ: _________________________.

4.3 Стрелок в тире стреляет по мишени до тех пор, пока не поразит её. Известно, что он попадает в цель с вероятностью 0,4 при каждом отдельном выстреле. Какое наименьшее количество патронов нужно дать стрелку, чтобы он поразил цель с вероятностью не меньше 0,7?

Ответ: _________________________.

4.4 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая бата рейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,95. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,05. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: _________________________.

4.5 В коробке 10 синих, 3 красных и 12 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

Ответ: _________________________.

4.6 Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,9. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Ответ: ________________________.

5

5.1 Решите уравнение $(2x+3)^2 = (2x+9)^2$

Ответ: ________________________.

5.2 Решите уравнение $\sqrt{32+4x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, укажите меньший из них.

Ответ: ________________________.

5.3 Решите уравнение $5^{2x-6} = \frac{1}{25}$.

Ответ: ________________________.

5.4 Решите уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-6} = 8^x$.

Ответ: ________________________.

5.5 Решите уравнение $\log_2(-3x+8) = 7$.

Ответ: ________________________.

5.6 Решите уравнение $3^{\log_{27}(2x-9)} = 3$.

Ответ: ________________________.

6

6.1 Найдите значение выражения $\log_2 12{,}8 + \log_2 5$

Ответ: ________________________.

6.2 Найдите значение выражения $\log_5 2 \cdot \log_2 125$

Ответ: ________________________.

6.3 Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$, $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$.

Ответ: ________________________.

6.4 Найдите значение выражения $\sqrt{128}\cos^2\frac{7\pi}{8} - \sqrt{32}$.

Ответ: ________________________.

6.5 Найдите значение выражения $\frac{7\sin 154^0}{\cos 77^0 \cdot \cos 13^0}$.

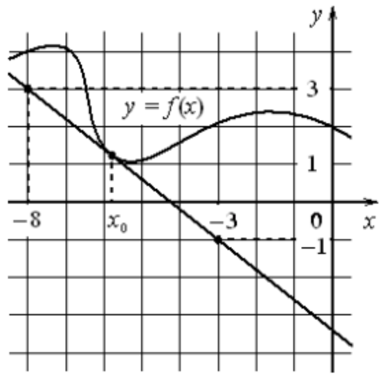
Ответ: ________________________.

6.6 Найдите значение выражения $\frac{\left(6^{\frac{3}{4}} \cdot 9^{\frac{2}{3}}\right)^{12}}{54^8}$.

Ответ: ________________________.

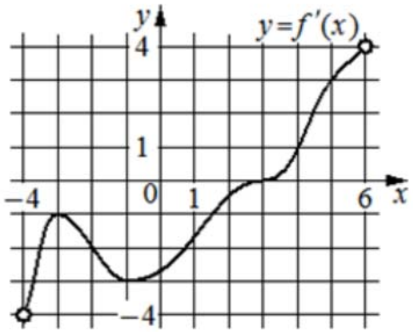
7

7.1 . На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: ________________________.

7.2 На рисунке изображён график $y = f'(x)$– производной функции $f(x)$, определённой на интервале (–4; 6) . Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 3x$ или совпадает с ней.

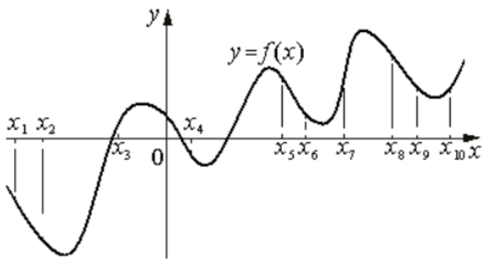


Ответ: ________________________.

7.3 Прямая $y = -3x - 5$ является касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 7x + c$. Найдите c.

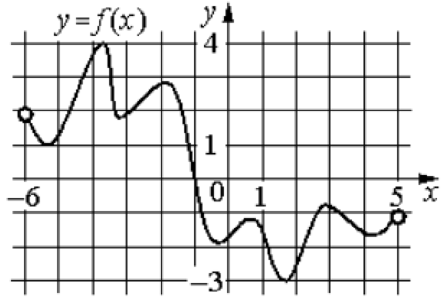
Ответ: ________________________.

7.4 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены 10 точек: $x_1, x_2, ..., x_{10}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна.



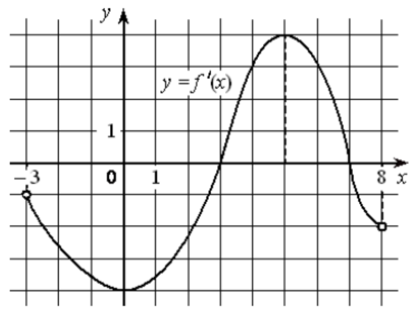
Ответ: ________________________.

7.5 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале (–6; 5) Определите количество целых точек, в которых производная функции из этих точек производная функции отрицательна.



Ответ: ________________________.

7.6 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$– производной функции $f(x)$, определённой на интервале (–3;8). Найдите точку максимума функции $f(x)$.



Ответ: ________________________.

8

8.1 Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $\upsilon_0 = 60$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 18$ км/ч^2. Расстояние (в км) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $S = \upsilon_0 t + \dfrac{at^2}{2}$, где t – время в часах, прошедшее после выезда из города. Определите время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 21 км. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ________________________.

8.2 Зависимость объёма спроса q (единиц в месяц) на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой $q = 65 - 5p$. Выручка предприятия за месяц r (тыс. руб.) вычисляется по формуле $r(p) = q \cdot p$. Определите наибольшую цену p, при которой месячная выручка $r(p)$ составит не менее 150 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Ответ: ________________________.

8.3 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t – время в минутах, $T_0 = 1320$ К, $a = -20$ К/мин^2, $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1800 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах

Ответ: ________________________.

8.4 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону – $h(t) = 2 + 13t - 5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 8 метров?

Ответ: ________________________.

8.5 К источнику с ЭДС ε = 115 В и внутренним сопротивлением r = 0,6 Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R (в Ом). Напряжение (в В) на этой нагрузке вычисляется по формуле $U = \dfrac{\varepsilon R}{R + r}$. При каком значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет равно 100 В? Ответ дайте в омах.

Ответ: ________________________.

8.6 Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 3 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 24$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t = \alpha RC \log_2 \dfrac{U_0}{U}$ (с), где α = 0,9 – постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 16,2 секунды. Ответ дайте в кВ (киловольтах).

Ответ: ________________________.

9

9.1 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй – 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 12% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: ________________________.

9.2 Семья состоит из мужа, жены и их дочери-студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 51%. Если бы стипендия дочери уменьшилась вдвое, общий доход семьи сократился бы на 3%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Ответ: ________________________.

9.3 Первые 140 км автомобиль ехал со скоростью 50 км/ч, следующие 160 км – со скоростью 60 км/ч, а затем 120 км – со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ________________________.

9.4 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 135 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 6 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 6 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: ________________________.

9.5 Моторная лодка прошла против течения реки 135 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость течения, если скорость лодки в неподвижной воде равна 12 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

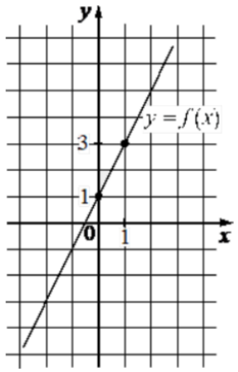
Ответ: ________________________.

9.6 Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 204 литра она заполняет на 5 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: ________________________.

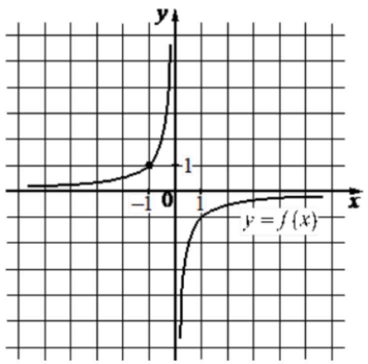
10

10.1 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=kx+b$. Найдите значение $f(5)$.



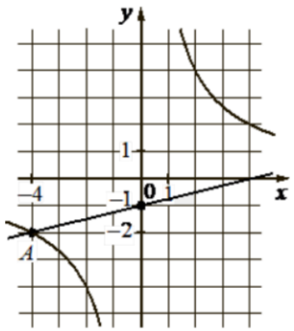
Ответ: ________________________.

10.2 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



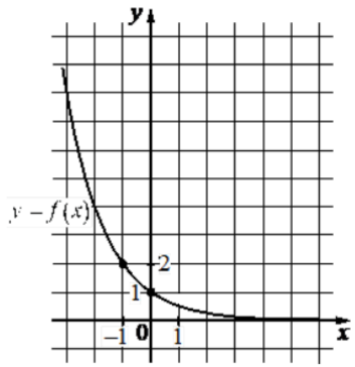
Ответ: ________________________.

10.3 На рисунке изображены графики функций $g(x)=ax+b$ и $f(x)=\frac{k}{x}$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



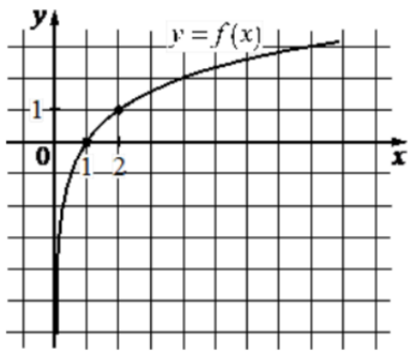
Ответ: ________________________.

10.4 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=a^x$. Найдите значение $f(-4)$.



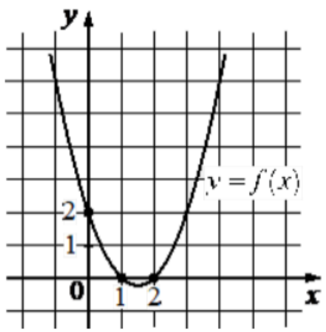
Ответ: ________________________.

10.5 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\log_a x$. Найдите значение $f(16)$.



Ответ: ________________________.

10.6 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=ax^2+bx+c$. Найдите значение $f(-3)$.



Ответ: ________________________.

11

11.1 Найдите наибольшее значение функции $y = 11 + 48x - x^3$ на отрезке [–4; 4].

Ответ: ________________________.

11.2 Найдите точку максимума функции $y = (x+8)^2 \cdot e^{3-x}$.

Ответ: ________________________.

11.3 Найдите точку минимума функции $y = -\dfrac{x^2+16}{x}$.

Ответ: ________________________.

11.4 Найдите точку максимума функции $y = 4\ln(x+1)^5 - 25x + 3$.

Ответ: ________________________.

11.5 Найдите наибольшее значение функции $y = 2\cos x - \dfrac{12}{\pi}x + 4$ на отрезке $\left[-\dfrac{2\pi}{3};0\right]$.

Ответ: ________________________.

11.6 Найдите наименьшее значение функции $y = 10tgx - 20x + 5\pi - 3$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{3};\dfrac{\pi}{3}\right]$.

Ответ: ________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12

12.1 А) Решите уравнение $\cos^2(\pi - x) = \dfrac{1}{2} + \cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

12.2 А) Решите уравнение $\cos(-x) + 2\sin(-x) = \left(\sin(\pi - x) + \cos(\pi + x)\right)^2$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

12.3 А) Решите уравнение $\left(\dfrac{1}{23}\right)^{\sin x} = \left(529^{\sin x}\right)^{\cos x}$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

12.4 А) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x - \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1} = 0$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

12.5 А) Решите уравнение $2\sin 2x\cos x = \sqrt{2} + 2\cos 2x\sin x$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

12.6 А) Решите уравнение $\sin x \cdot \log_2(\cos x) + \sin x + \dfrac{1}{2}\log_2(\cos x) + \dfrac{1}{2} = 0$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};2\pi\right]$.

13

13.1 В правильной четырехугольной пирамиде SABCD с вершиной S точка K лежит на ребре SC и делит его в отношении $1:3$, считая от вершины. Точка M – середина AS. Через MK проведено сечение, параллельное прямой DC.
А) Докажите, что сечение является равнобедренной трапецией.
Б) Найдите угол между прямыми MK и DC, если $SA = AB = 16$.

13.2 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ ребра основания равны 4, а боковые рёбра равны 5. Точка K – середина ребра B_1C_1, точка P лежит на ребре CC_1 так, что $C_1P:PC = 1:4$.
А) Докажите, что прямые AP и PK перпендикулярны.
Б) Найдите угол между плоскостями APK и CAA_1.

13.3 В правильной треугольной пирамиде DABC с вершиной D сторона основания AB равна 9, высота равна 3. На ребрах AB, AC и AD соответственно отмечены точки P, K и F, причем $AP = AK = 3$ и $AF = 2$.
А) Докажите, чтоплоскости PKF и DBC параллельны.
Б) Найдите расстояние от точки F до плоскости DBC.

13.4 На ребрах AD и BD правильного тетраэдра DABC взяты точки M и K соответственно так, что $MD:AM = BK:KD = 2$.
А) Пусть L – точка пересечения прямой KM с плоскостью ABC. Докажите, что $AB:AL = 3$.
Б) Найдите угол между прямой KM и плоскостью ABC.

13.5 В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб ABCD с диагоналями $AC = 10$ и $BD = 24$.
А) Докажите, что прямые B_1D_1 и AC_1 перпендикулярны.
Б) Найдите расстояние между прямыми B_1D_1 и AC_1, если известно, что боковое ребро призмы равно 20.

13.6 На ребре AB правильной четырехугольной пирамиды SABCD с основанием ABCD отмечена точка Q, причем $AQ:QB = 1:2$. Точка P – середина ребра AS.
А) Докажите, что плоскость DPQ перпендикулярна плоскости основания пирамиды.
Б) Найдите площадь сечения DPQ, если площадь сечения DSB равна 18.

14. Решите неравенство:

14.1 $\dfrac{0{,}5^x - 8}{0{,}5^x - 4} \le 0{,}5^x + 1$

14.2 $4\cdot 16^x + 11\cdot 20^x - 20\cdot 25^x \ge 0$

14.3 $\log_2^2(10+2x) + 9\log_{0,5}(10+2x) + 18 \ge 0$

14.4 $\log_{x-9} 27 - \log_9(x-9) + 1{,}25 \ge 0$

14.5 $\dfrac{2\log_3(81x) - \log_3^2 x - 5}{\log_3^2 x} > 0$

14.6 $\dfrac{3^{x+1} + 27\cdot\log_3 x}{16-5x} < \dfrac{81 + 3^{x-1}\cdot\log_3 x^3}{16-5x}$

15

15.1 В июле 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 650 тыс. рублей на 10 лет. Условия его возврата таковы:
– в январе 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг возрастает на 19% по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг возрастает на 16% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2035 года кредит должен быть полностью погашен.
Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

15.2 В июле 2023 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы: – каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года; – с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга; – в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2023	Июль 2024	Июль 2025	Июль 2026
Долг (млн руб.)	S	0,7S	0,4S	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 3 млн рублей.

15.3 15 декабря планируется взять кредит в банке на сумму 600 тысяч рублей на $(n+1)$ месяц. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на одну и туже сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

– 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей.

– к 15-му числу $(n+1)$-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

На сколько месяцев планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 852 тысячи рублей.

15.4 В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 860 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 860 тыс. рублей;

— выплаты в 2030 и 2031 годах равны;

— к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

15.5 15 января планируется взять кредит в банке на 2 года. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что за 15-й месяц кредитования нужно выплатить 44 тыс. рублей. Сколько рублей нужно будет вернуть банку в течение всего срока кредитования?

15.6 В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 900 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равны;

— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 году составит 499,2 тыс. рублей. Сколько рублей составит полная переплата после полного погашения кредита?

16

16.1 Дан треугольник ABC. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекается с биссектрисой угла BAC в точке K, лежащей на стороне BC.

А) Докажите, что $AC^2 = BC \cdot CK$.

Б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AKC, если $\sin B = 0{,}6$ и сторона $AC = 24$.

16.2 Биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC пересекаются в точке D. Центр окружности, вписанной в треугольник BCD, лежит на окружности, описанной около треугольника ABC.

А) Докажите, что $\angle BDC = 60^0$.

Б) Найдите синус угла между прямыми AD и BC, если $AB = 4$ и $AC = 10$.

16.3 Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML — в точке A. Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

А) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

Б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и AK=16.

16.4 Окружность, проходящая через вершины A, C и D прямоугольной трапеции ABCD с основаниями AD и BC, пересекает меньшую боковую сторону AB в точке P и касается прямой BC. Известно, что AD = CD.

А) Докажите, что CP – биссектриса угла ACB.

Б) В каком отношении прямая DP делит площадь трапеции.

16.5 Прямая, проходящая через вершину B прямоугольника ABCD перпендикулярно диагонали AC, пересекает сторону AD в точке M, равноудалённой от вершин B и D.

А) Докажите, что $\angle ABM = \angle DBC = 30^0$.

Б) Найдите расстояние от центра прямоугольника до прямой CM , если $BC = 9$.

16.6 Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке K. К этой окружности проведена касательная, параллельная биссектрисе AP треугольника и пересекающая стороны AC и BC в точках M и N соответственно.

А) Докажите, что угол MOC равен углу NOK.

Б) Найдите периметр треугольника ABC, если отношение площадей трапеции AMNP и треугольника ABC равно $2:7$, $MN = 2$, $AM + PN = 6$.

17

17.1 Найдите все значения параметра a, при которых один из корней уравнения

$$\log_3^2 x - a\log_3 x + 3a + 2 = 2a^2 + 3\log_3 x$$

лежит на интервале $(9;81)$, а другой – на интервале $\left(\frac{1}{9};3\right)$.

17.2 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$tg\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\log_3(a-2x) = -\log_3(a-2x)$$

имеет единственный корень на отрезке $[-2;0]$.

17.3 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\frac{\sqrt{x-a+9}}{x^2+8x} + \frac{\sqrt{x-a+9}}{a^2-4a} = 0$$

имеет ровно два корня на отрезке $[-6;0]$.

17.4 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{7x^2+3ax+9} = \frac{x^2+ax+6}{2}$$

имеет три различных корня.

17.5 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$a(x^2+1+\log_2 x) + 2x\log_2 x = (x^2+1)\log_2 x + a(a+2x)$$

имеет не менее двух различных корней

17.6 Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 - a = -4(1+x) - y^2 \\ |x| = 1 - |y-1| \end{cases}$$

имеет единственное решение.

18

18.1 На доске написаны все пятизначные числа, в десятичной записи которых по одному разу встречаются цифры 4, 5, 6, 7 и 8 (45678, 45687 и т. д.).

А) Есть ли среди них число, которое делится на 55?

Б) Есть ли среди них число, которое делится на 505?

В) Найдите наибольшее из этих чисел, делящееся на 11.

18.2 Каждое из четырёх подряд идущих натуральных чисел разделили на их первые цифры и результаты сложили в сумму S.

А) Может ли быть $S=41\frac{11}{24}$?

Б) Может ли быть $S=569\frac{29}{72}$?

В) Найдите наибольшее целое S, если все четыре числа лежат в отрезке от 400 до 999 включительно.

18.3 На доске написано 30 различных натуральных чисел, каждое из которых либо четное, либо его десятичная запись заканчивается на цифру 7. Сумма написанных чисел равна 810.

А) Может ли на доске быть 24 четных числа?

Б) Может ли быть на доске ровно два числа, оканчивающихся на 7?

В) Какое наименьшее количество чисел с последней цифрой 7 может быть на доске?

18.4 На доске написано несколько различных натуральных чисел, которые делятся на 3 и оканчиваются на 4.

А) Может ли сумма составлять 282?

Б) Может ли их сумма составлять 390?

В) Какое наибольшее количество чисел могло быть на доске, если их сумма равна 2226?

18.5 На доске написано число 2045 и еще несколько (не менее двух) натуральных чисел, не превосходящих 5000. Все написанные на доске числа различны. Сумма любых двух из написанных чисел делится на какое-нибудь из остальных.

А) Может ли на доске быть написано ровно 1024 числа?

Б) Может ли на доске быть написано ровно пять чисел?

В) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

18.6 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

А) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 14?

Б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

В) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 123.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

