

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ  
**Новогодний тренировочный вариант № 448/48**  
 (совместный проект alexlarin.net и egemathschool.ru)

Профильный уровень  
 Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 10 - 0,8 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

**Желаем успеха!**

**Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

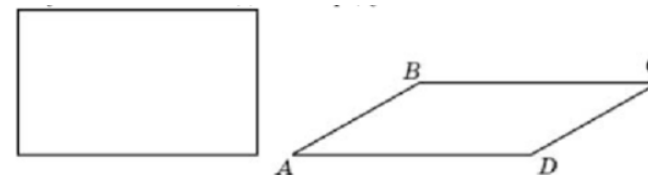
Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.



**1.1** Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, а радиус вписанной окружности этого треугольника равен 2. Найдите периметр этого треугольника.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**1.2** Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника. Ответ дайте в градусах.

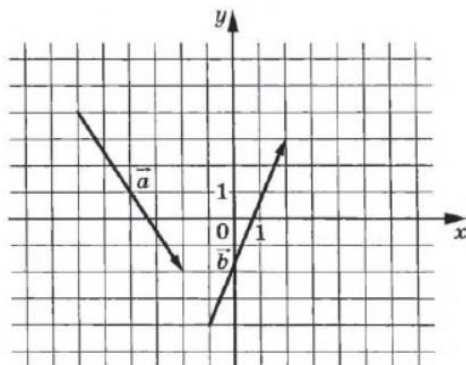


Ответ: \_\_\_\_\_.

**2.1** Сторона правильного треугольника ABC равна  $2\sqrt{3}$ . Найдите скалярное произведение вектора  $\overrightarrow{AB}$  на вектор  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**2.2** На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Найдите скалярное произведение векторов  $2\vec{a}$  и  $\vec{b}$ .

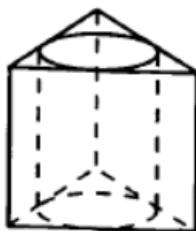


Ответ: \_\_\_\_\_.

**3.1** Цилиндр и конус имеют общее основание, вершина конуса лежит на оси цилиндра, высота конуса относится к высоте цилиндра как 4:5. Найдите объем цилиндра, если объем конуса равен 24.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**3.2** Цилиндр вписан в правильную треугольную призму, радиус основания цилиндра равен  $2\sqrt{3}$ , а высота цилиндра равна 14. Найдите площадь боковой поверхности призмы.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**4.1** В новогодний хоровод, взявшись за руки, в случайном порядке встали 24 человека, среди них Наталья и Николай. Найдите вероятность того, что они не стоят рядом. Ответ округлите до сотых.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**4.2** Ваня бросил игральный кубик, и у него выпало больше 2 очков; Петя бросил игральный кубик, и у него выпало меньше 6 очков. Найдите вероятность того, что у Пети выпало очков больше, чем у Вани.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5.1** На предприятии по производству новогодних светодиодных свечей 10% произведенных свечей имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных свечей. Остальные свечи поступают в продажу. Найдите вероятность того, что произведенная светодиодная свеча попадет в продажу.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5.2** На одной полке стоит 25 блюд: 16 красных и 9 синих. На другой полке стоит 25 чашек: 13 красных и 12 синих. Наугад берут два блюда и две чашки. Найдите вероятность, что из них можно будет составить две чайные пары (блюдо с чашкой), каждая из которых будет одного цвета.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**6.1** Решите уравнение  $24^{x+1,5} - 24^{x-0,5} = 575$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**6.2** Решите уравнение  $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x} + \sqrt{5} = \sqrt{9+4\sqrt{5}}$ . Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе укажите меньший из них.

Ответ: \_\_\_\_\_.

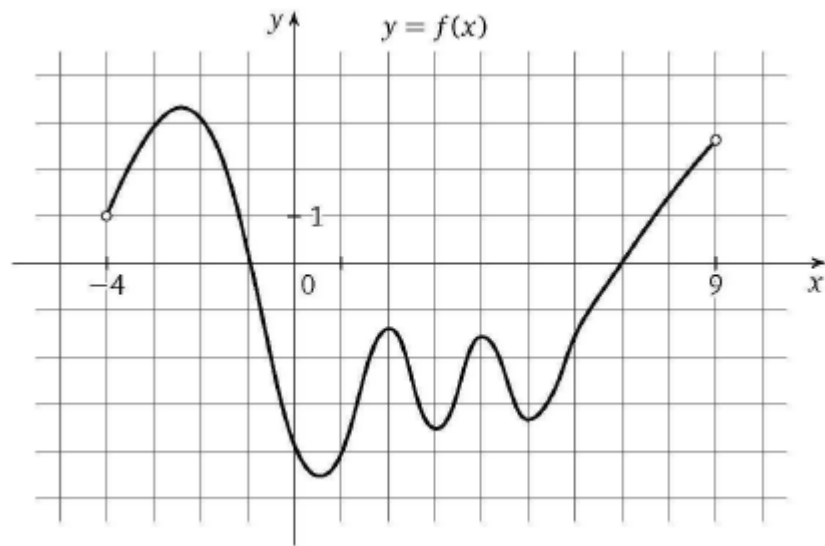
**7.1** Найдите значение выражения  $2025\sqrt{13}\operatorname{tg}\alpha$ , если  $\cos^2\alpha = \frac{9}{22}$  и  $\alpha \in \left(\frac{9\pi}{2}; 5\pi\right)$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**7.2** Найдите значение выражения:  $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$

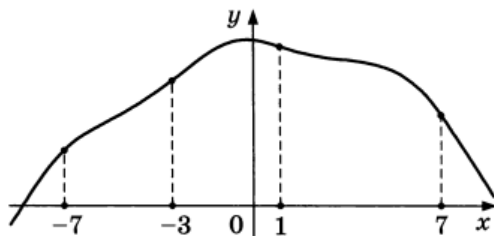
Ответ: \_\_\_\_\_.

**8.1** На рисунке изображен график функции  $y = f(x)$ , определенной на интервале  $(-4; 9)$ . Найдите число точек графика, в каждой из которых касательная к нему перпендикулярна прямой  $x = -2024$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**8.2** На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$  и отмечены точки  $-7, -3, 1, 7$ . В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**9.1** Рейтинг  $R$  интернет-магазина вычисляется по формуле  $R = r_{\text{пок}} - \frac{r_{\text{пок}} - r_{\text{экс}}}{(K + 1)^m}$ ,

где  $m = \frac{0,02K}{r_{\text{пок}} + 0,1}$ ,  $r_{\text{пок}}$  — средняя оценка магазина покупателями,  $r_{\text{экс}}$  — оценка магазина, данная экспертами,  $K$  — число покупателей, оценивших магазин. Найдите рейтинг интернет-магазина, если число покупателей, оценивших магазин, равно 15, их средняя оценка равна 0,5, а оценка экспертов равна 0,22.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**9.2** Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием  $f = 20$  см. Расстояние  $d_1$  от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 15 см до 45 см, а расстояние  $d_2$  от линзы до экрана — в пределах от 90 см до 120 см. Изображение на экране будет чётким, если выполняется соотношение  $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$ . На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

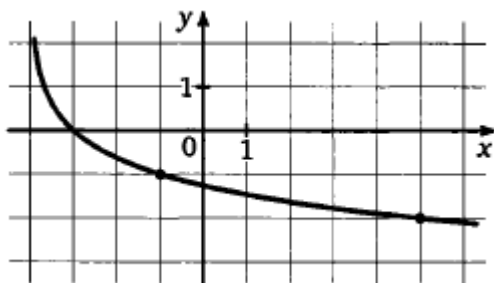
**10.1** Средняя скорость обычной электрички на 20 км/ч меньше, чем у электрички «Новогодний экспресс», поэтому из города А в город В, расстояние между которыми равно 80 км, обычная электричка идет на 40 минут дольше. Найдите среднюю скорость электрички «Новогодний экспресс». Ответ дайте в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**10.2** Толстовка дороже футболки на 19% и дешевле, чем кеды, на 30%. На сколько процентов кеды дороже футболки?

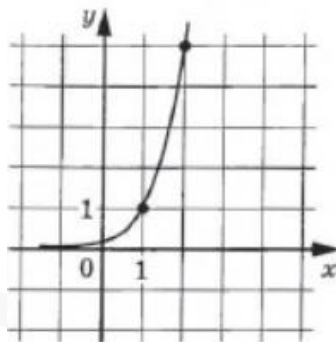
Ответ: \_\_\_\_\_.

**11.1** На рисунке изображен график функции  $f(x) = \log_a(x+b)$ . Найдите  $f(77)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**11.2** На рисунке изображен график функции  $f(x) = pa^x$ . Найдите  $f(4)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

**12.1** Найдите наибольшее значение функции  $y = 6 \cos x + 3\sqrt{3}x - \sqrt{3}\pi + 2024$  на отрезке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**12.2** Найдите наименьшее значение функции  $y = 4x - \ln(4x) + 16$  на отрезке  $\left[\frac{1}{8}; \frac{5}{8}\right]$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания



## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

**13.1** а) Решите уравнение

$$\log_{2024}(\sin 3x \sin^3 x + \cos 3x \cos^3 x) = \log_{\frac{1}{2024}} 8$$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку  $[23\pi; 25\pi]$ .

**13.2.** а) Решите уравнение  $\frac{3 \sin x - 4}{\sin x - 1} + \frac{1}{\sin^2 x - \sin x} = 1$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$

**14.1** В правильной четырехугольной пирамиде SABCD сторона основания равна  $3\sqrt{2}$ , а высота SO пирамиды равна 8. Через точку A параллельно BD проведена плоскость  $\alpha$ , а через точки B и D параллельная ей плоскость  $\beta$  так, что сечения пирамиды этими плоскостями имеют равные площади.

а) Докажите, что плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  разбивают ребро SC на три равные части.

б) Найдите расстояние между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ .

**14.2** В правильной треугольной пирамиде  $SABC$  боковое ребро равно 9, а высота пирамиды  $SO$  равна  $3\sqrt{5}$ , точки  $M$  и  $T$  – середины отрезков  $BC$  и  $SM$  соответственно.

А) Докажите, что  $AT$  – высота пирамиды, проведенная к грани  $SBC$

Б) Найдите расстояние между прямыми  $AT$  и  $SB$

**15.1** Решите неравенство:

$$\log_{|2x+2|}(1-9^x) < \log_{|2x+2|}(1+3^x) + \log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9} + 3^{x-1}\right)$$

**15.2** Решите неравенство:  $\log_{\frac{2-x}{2}} \frac{6}{2+x} \geq -1$

**16.1** В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг будет возрастать на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

– в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита равна 2580 тыс. рублей. Найдите величину долга (в тыс. руб.) в конце июля 2032 года.

**16.2** Производство некоторого товара облагалось налогом в размере  $t_0$  рублей за единицу товара. После того как государство, стремясь увеличить сумму налоговых поступлений, увеличило налог в два с половиной раза (до  $t_1 = 2,5t_0$ ), сумма налоговых поступлений не изменилась. На сколько процентов государству следует изменить налог после этого, чтобы добиться максимальных налоговых сборов, если известно, что при налоге, равном  $t$  рублей за единицу товара, объём производства товара составляет  $9000 - 2t$  единиц, если это число положительно, и 0 единиц иначе?

**17.1** В остроугольном треугольнике  $ABC$  высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в точке  $H$ . Через точку  $C_1$  параллельно высоте  $BB_1$  проведена прямая, пересекающая высоту  $AA_1$  в точке  $K$ .

а) Докажите, что  $AB \cdot KH = BC \cdot C_1H$ .

б) Найдите отношение площадей треугольников  $C_1HK$  и  $ABC$ , если  $AB = 4$ ,  $BC = 5$ ,  $AC = \sqrt{17}$ .

**17.2** Окружность с центром в точке  $C$  касается гипотенузы  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  и пересекает его катеты  $AC$  и  $BC$  в точках  $E$  и  $F$ . Точка  $D$  – основание высоты, опущенной из вершины  $C$ .  $O_1$  и  $O_2$  – центры окружностей, вписанных в треугольники  $BCD$  и  $ACD$ .

А) Докажите, что  $O_1$  и  $O_2$  лежат на отрезке  $EF$ .

Б) Найдите расстояние от точки  $C$  до прямой  $O_1O_2$ , если  $AC = 15$ ,  $BC = 20$ .

**18.1** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_{2023}\left(1012 + 1011 \cdot \frac{|x|}{x}\right) + (x-y)^2 = a, \\ \log_{2024}(3-y) = 0 \end{cases}$$

имеет два различных решения.

**18.2** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $h(x) = a - a^2$  имеет хотя бы один корень, если

$$h(x) + 3h(-x) = 4a + 16|x| + 16\sqrt{x^2 + 16} - 6|x + 4a| - 2|x - 4a| + 2x$$

**19.1** Владелица супермаркета «Новогодняя халява от Алевтины» организовала распродажу новогодних сувениров. В течение дня покупатели приходили к кассиру, желая произвести различные платежи (сумма любого платежа – четное число рублей). Каждый протягивал купюру 5000 рублей, а кассир выдавал сдачу, имея только 300 монет по 10 рублей и 500 монет по 2 рубля. По итогам дня все монеты оказались потраченными на сдачу.

- а) Могло ли за день быть 250 покупателей, если все они получили равную сдачу?
- б) Каким могло быть наибольшее число покупателей, если каждый получил одинаковую сдачу?
- в) Для какого наибольшего числа покупателей кассир мог выдать на сдачу все монеты указанным образом при любом распределении сдач, не противоречащим условию?

**19.2** Трёхзначное число  $A$  имеет  $k$  натуральных делителей (в том числе 1 и  $A$ ).

- а) Может ли  $k$  быть равно 7?
- б) Может ли  $k$  быть равно 25?
- в) Найдите наибольшее значение  $k$ .

*Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.*