Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Финальный тренировочный вариант-мутант № 8 к интенсиву «Штурм мозга перед ЕГЭ» (6 в 1)

Профильный уровень
Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 18 заданий. Часть 1 содержит 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–11 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8 | 10 -0,8 Бланк

При выполнении заданий 12–18 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1-11 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. Решите уравнение:

1.1 $\log_3(-10x-6)=2$.

1.2 $\left(\frac{1}{3}\right)^{x+27}=9^x$.

1.3 $\sqrt{18-4x}=2$

1.4 $\frac{1}{2x+4}=\frac{1}{3x-1}$

1.5 $5^{\log_{25}(4x+1)}=10$

1.6 $(x+4)^9=512$

2.

2.1 На конференцию приехали 3 учёных из Дании, 6 из Польши и 6 из Венгрии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что четвёртым окажется доклад учёного из Венгрии.

2.2 Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 9 спортсменов из России, в том числе Иван Побединский Бочкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Иван Побединский будет играть с каким-либо спортсменом из России.

2.3 В группе туристов 200 человек. Их вертолётом доставляют в труднодоступный район, перевозя по 15 человек за рейс. Порядок, в котором вертолёт перевозит туристов, случаен. Найдите вероятность того, что турист В. полетит первым рейсом вертолёта.

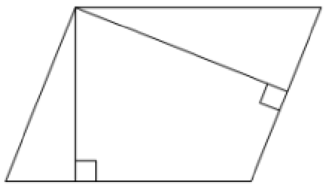
2.4 Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

2.5 В классе 21 учащийся, среди них два друга — Ярослав и Григорий. Учащихся случайным образом разбивают на 3 равные группы. Найдите вероятность того, что Ярослав и Григорий окажутся в одной группе.

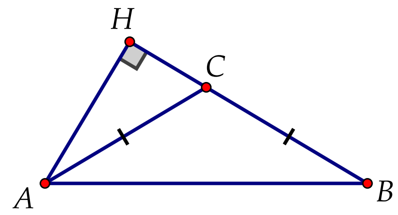
2.6 В сборнике билетов по истории всего 25 билетов, в 13 из них встречается вопрос про Александра Второго. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос про Александра Второго.

3.

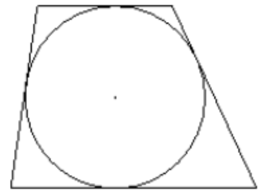
3.1 Стороны параллелограмма равны 24 и 27. Высота, опущенная на меньшую из этих сторон, равна 18. Найдите высоту, опущенную на большую сторону параллелограмма.



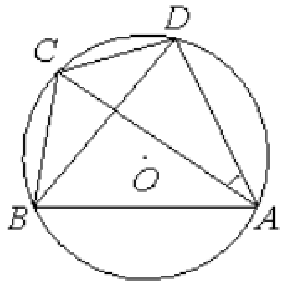
3.2 В треугольнике ABC AC=BC, AB=20, высота AH равна 8. Найдите синус угла BAC.



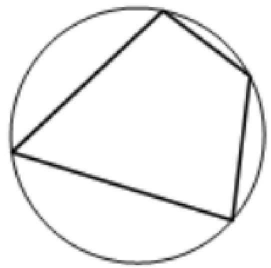
3.3 Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 16 и 26. Найдите среднюю линию трапеции.



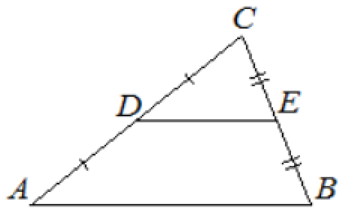
3.4 Четырёхугольник ABCD вписан в окружность. Угол ABC равен 82°, угол ABD равен 47°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.



3.5 Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 56° и 77°. Найдите меньший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.



3.6 Площадь треугольника ABC равна 24, DE – средняя линия, параллельная стороне AB. Найдите площадь трапеции ABED.



4.

4.1 Найдите значение выражения $\log_2 240 - \log_2 3,75$

4.2 Найдите tgα, если $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{13}}{13}$ и $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$

4.3 Найдите значение выражения $\sqrt{108}cos^2\dfrac{\pi}{12} - \sqrt{27}$

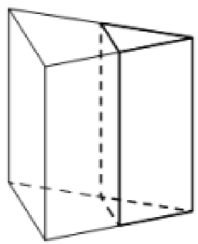
4.4 Найдите значение выражения $\dfrac{16\sin 98^0 \cdot \cos 98^0}{\sin 196^0}$

4.5 Найдите значение выражения $\dfrac{\log_8 14}{\log_{64} 14}$

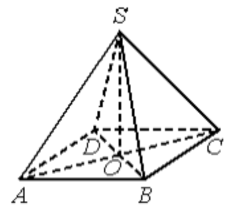
4.6 Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{24}}$

5.

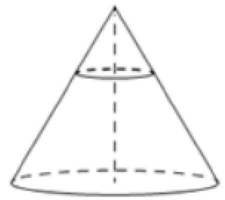
5.1 Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 28. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



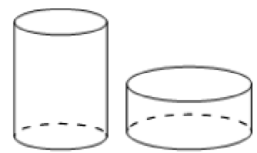
5.2 В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD точка O – центр основания, S – вершина, SO=48, SC=80. Найдите длину отрезка BD.



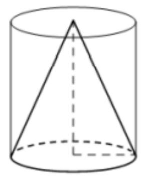
5.3 Площадь основания конуса равна 48. Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, делит его высоту на отрезки длиной 4 и 12, считая от вершины. Найдите площадь сечения конуса этой плоскостью.



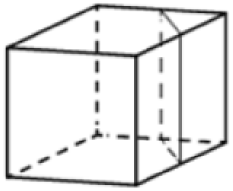
5.4 В цилиндрическом сосуде уровень жидкости достигает 405 см. На какой высоте будет находиться уровень жидкости, если её перелить во второй цилиндрический сосуд, диаметр которого в 9 раз больше диаметра первого? Ответ выразите в сантиметрах



5.5 Конус и цилиндр имеют общее основание и общую высоту (конус вписан в цилиндр). Вычислите объём конуса, если объём цилиндра равен 162.

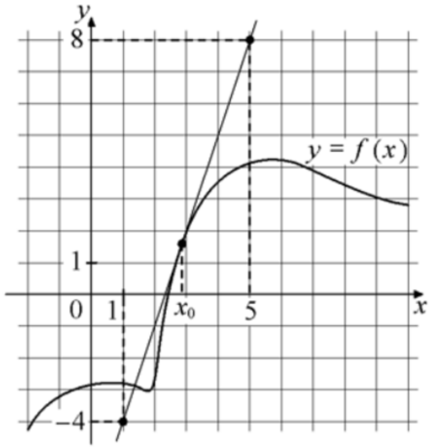


5.6 Объём треугольной призмы, отсекаемой от куба плоскостью, проходящей через середины двух рёбер, выходящих из одной вершины, и параллельной третьему ребру, выходящему из этой же вершины, равен 1,5. Найдите объём куба.

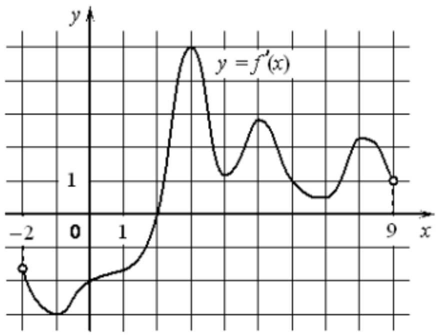


6.

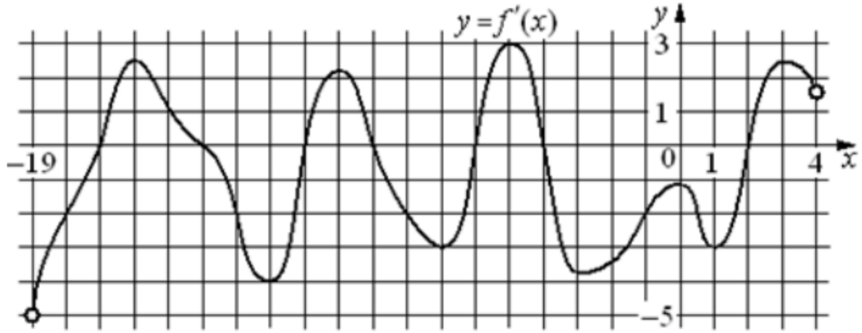
6.1 На рисунке изображены график функции y = f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции f(x) в точке x_0.



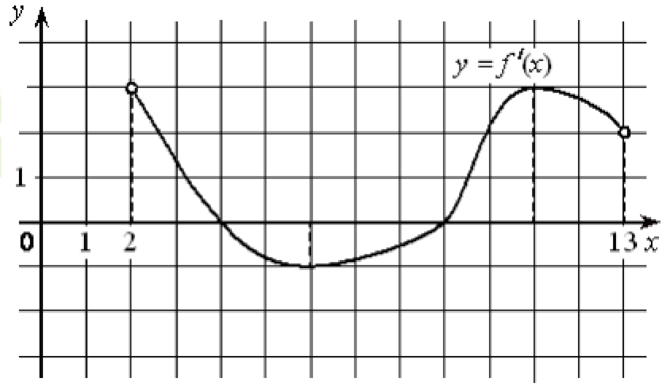
6.2 На рисунке изображен график функции $y = f'(x)$ - производной функции f(x), определенной на интервале (–2;9). В какой точке отрезка [2;8] функция f(x) принимает наибольшее значение?



6.3 На рисунке изображен график $y = f'(x)$ - производной функции f(x), определенной на интервале (–19;4). Найдите количество точек минимума функции f(x), принадлежащих отрезку [–18; 3]

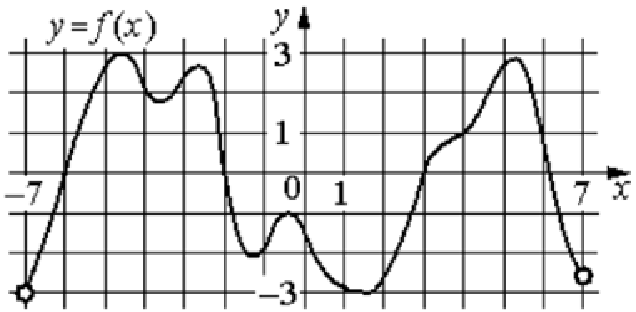


6.4 На рисунке изображен график $y = f'(x)$ – производной функции f(x), определенной на интервале (2;13). Найдите точку максимума функции.



6.5 Прямая $y = 3x+4$ является касательной к графику функции $f(x) = 3x^2 - 3x + c$. Найдите $\boldsymbol{c}$.

6.6 На рисунке изображен график функции $y = f(x)$, определенной на интервале (–7;7). Определите количество целых точек, в которых производная положительна.



7.

7.1 Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле $T(t)=T_0+bt+at^2$, где t – время в минутах, T_0 = 1320 ^{0}К, a = −20 К/мин^2, b = 200 К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1800 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

7.2 Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону $h(t)=2+13t-5t^2$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее 8 метров?

7.3 Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием f = 20 см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 15 см до 40 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана – в пределах от 100 до 120 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение $\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}=\frac{1}{f}$. Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

7.4 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m(t)=m_0\cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 (мг) – начальная масса изотопа, t (мин.) – время, прошедшее от начального момента, T (мин.) – период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа $m_0=16$ мг. Период его полураспада T = 7 мин. Через сколько минут масса изотопа будет равна 1 мг?

7.5 Мяч бросили под углом α к плоской горизонтальной поверхности земли. Время полёта мяча (в секундах) определяется по формуле $t=\frac{2v_0\sin\alpha}{g}$. При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время полёта будет не меньше 2,1 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0=21$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения g = 10 м/с^2.

7.6 Водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\upsilon=5$ моль воздуха объёмом V_1 = 24 л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 (в л). Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле $A=\alpha\upsilon T\log_2\frac{V_1}{V_2}$, где $\alpha=14{,}9\ \frac{Дж}{моль\cdot K}$ – постоянная, T = 300 К – температура воздуха. Найдите, какой объём V_2 будет занимать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 22 350 Дж. Ответ дайте в литрах.

8.

8.1 В сосуд, содержащий 10 литров 24-процентного водного раствора некоторого вещества, добавили 5 литров воды. Сколько процентов составит концентрация получившегося раствора?

8.2 Одиннадцать одинаковых рубашек дешевле куртки на 1%. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки?

8.3 Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 128 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 8 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 8 часов. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

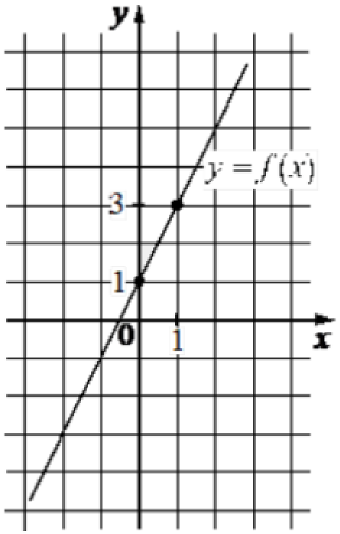
8.4 По двум параллельным железнодорожным путям навстречу друг другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 85 км/ч и 35 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 250 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошёл мимо пассажирского, равно 30 секундам. Ответ дайте в метрах.

8.5 Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 27 км/ч, проходит некоторое расстояние по реке и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 32 часа после отправления из него. Сколько километров проходит теплоход за весь рейс?

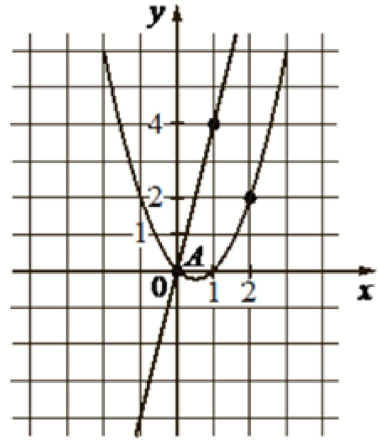
8.6 Заказ на 255 деталей первый рабочий выполняет на 2 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 2 детали больше, чем второй?

9.

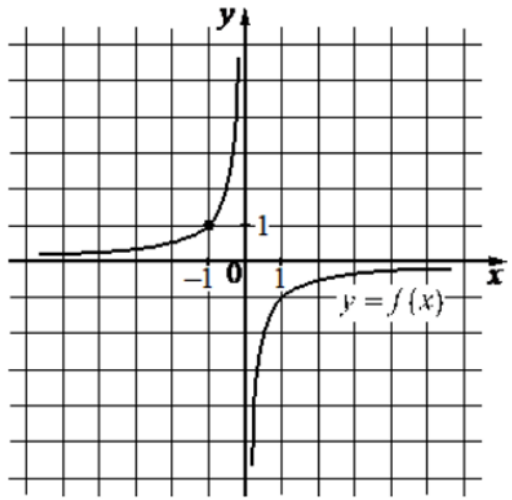
9.1 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=kx+b$. Найдите значение *f(4)*.



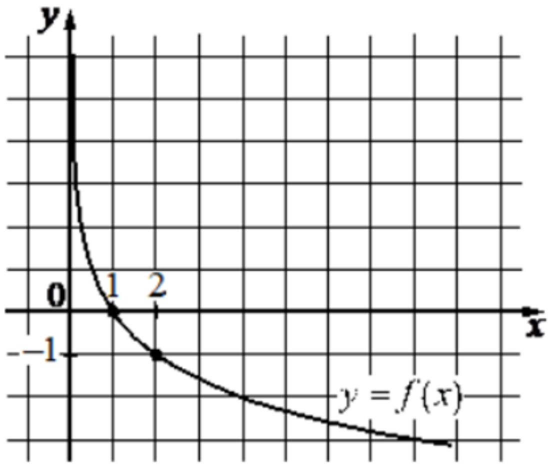
9.2 На рисунке изображены графики функций видов $f(x)=ax^2+bx+c$ и $g(x)=kx$, пересекающиеся в точках А и В. Найдите абсциссу точки В.



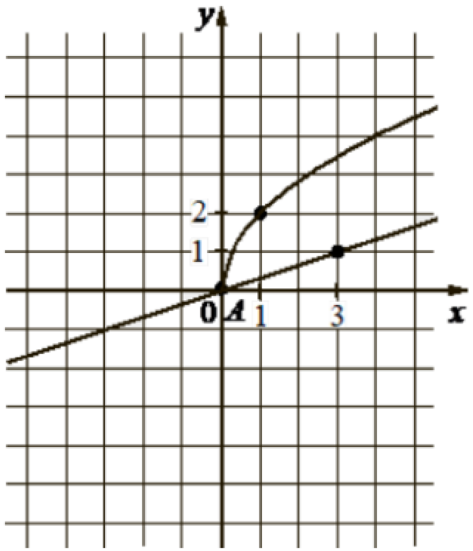
9.3 На рисунке изображен график функции вида $f(x)=\dfrac{k}{x}$. Найдите значение *f (10)*.



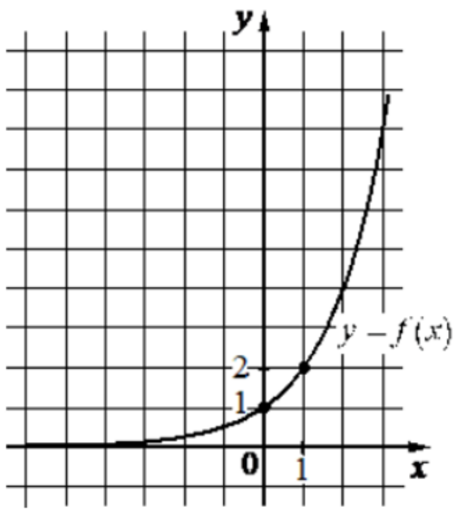
9.4 На рисунке изображен график функции вида $f(x)=\log_a x$. Найдите значение *f (16)*.



9.5 На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



9.6 На рисунке изображен график функции вида $f(x) = a^x$. Найдите значение $f(4)$.



10.

10.1 Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 9».

10.2 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,8. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

10.3 Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,9. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа **не перегорит**.

10.4 В коробке 11 синих, 6 красных и 8 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

10.5 Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,01. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,96. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,06. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

10.6 В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится кофе, равна 0,1. Вероятность того, что кофе закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что кофе закончится в двух автоматах равна 0,05. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

11.

11.1 Найдите точку максимума функции $y = x^3 + 4x^2 + 4x + 17$.

11.2 Найдите наибольшее значение функции $y = 11 + 6x - 4x\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 21]$.

11.3 Найдите точку минимума функции $y = (7 - x) \cdot e^{7-x}$.

11.4 Найдите наибольшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[-12; -1]$.

11.5 Найдите наибольшее значение функции $y = \ln(x+8)^3 - 3x$ на отрезке $[-7,5; 0]$.

11.6 Найдите наибольшее значение функции $y = 85x - 83\sin x + 55$ на отрезке $[-\dfrac{\pi}{2}; 0]$.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 12–18 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (12, 13 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

12.

12.1 а) Решите уравнение $\sqrt{3}\cos^2 x = -\sin\dfrac{\pi}{6}\sin 2x$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$

12.2 а) Решите уравнениеп $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(3tg^2 x - 2\sqrt{3}tgx + 1\right) = 0$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2}; 2\pi\right]$

12.3 а) Решите уравнение $\left(2\sin\dfrac{x}{6}\cos\dfrac{5x}{6} + 2\cos\dfrac{x}{6}\sin\dfrac{5x}{6}\right)^2 = 3$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \dfrac{3\pi}{2}\right]$

12.4 а) Решите уравнение $2\cdot 22^{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} - 7\cdot 22^{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = -5$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; 4\pi]$

12.5 а) Решите уравнение $\log_2\dfrac{5}{\sin x} = 2\log_4(10\cos x)$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$

12.6 а) Решите уравнение $\frac{0,5\sin 2x\sin x+0,25\sin 2x}{\log_2(tgx)}=0$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$

13.

13.1 В правильной треугольной призме $BCDB_1C_1D_1$ известно, что $BC=3$ и $BB_1=5$. На боковых ребрах BB_1, CC_1, DD_1 взяты точки L, M и N соответственно, так что $BL:LB_1=3:2$, $CM:MC_1=2:3$, $DN:ND_1=1:4$.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью LMN является равнобедренным треугольником.

б) Найдите угол между плоскостями LMN и BCD.

13.2 В правильной четырехугольной пирамиде SABCD сторона основания AB равна 16, а высота равна 4. На ребрах AB, CD, и AS отмечены точки M, N и K соответственно, причем AM = DN = 4 и AK = 3.

а) Докажите, что плоскости MNK и SBC параллельны.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости SBC.

13.3 В основании пирамиды SABCD лежит квадрат ABCD. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания.

а) Докажите, что плоскости ASD и CSD перпендикулярны.

б) Найдите расстояние между прямыми SC и BD, если сторона основания равна 2, а высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$.

13.4 Дана правильная шестиугольная призма. Плоскость α проходит через сторону одного основания и противоположную ей сторону другого основания.

а) Докажите, что плоскость α проходит через середины двух боковых ребер призмы.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью α, если боковые грани призмы – квадраты с диагоналями, равными $2\sqrt{2}$.

13.5 Дана правильная треугольная пирамида SABC, боковое ребро которой равно 7, а сторона основания равна 6. На продолжении ребра SA за точку A отмечена точка P, а на продолжении ребра SB за точку B – точка Q, причем AP = BQ = SA.

а) Докажите, что прямые PQ и SC перпендикулярны друг другу.

б) Найдите угол между плоскостями ABC и CPQ.

13.6 В правильной треугольной пирамиде SABC с вершиной S проведена высота SD. На отрезке SD взята точка K так, что $SK:KD=1:2$. Известно, что двугранные углы между основанием и боковыми гранями равны 30^0, а расстояние от точки K до бокового ребра SB равно $\frac{4}{\sqrt{13}}$.

а) Докажите, что $SB=SD\sqrt{13}$.

б) Найдите объем пирамиды SABC.

14. Решите неравенство:

14.1 $25^{x-4}-5^{x-4}(125-x^2)-125x^2\le 0$

14.2 $\log_7(16^x+49^x-65\cdot 4^x+64)\ge 2x$

14.3 $3^{\lg(x^2-16)}\ge (x+4)^{\lg 3}$

14.4 $\dfrac{15^x-9\cdot 5^x-25\cdot 3^x+225}{\log_2(x+3)}\le 0$

14.5 $\log_2(x-2)-\log_2(x+2)+\log_{\frac{x+2}{x-2}}2>0$

14.6 $(5-x)\cdot(2\log_5^2 x-3\log_5 x+1)\ge 0$

15.

15.1 В июле 2024 года планируется взять кредит в банке на сумму 400000 рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на r% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за 2 года, причем в первый год будет выплачено 280000 рублей, а во второй год – 240000 рублей.

15.2 В июне планируется взять кредит в банке на сумму 6 миллионов рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по май каждого года необходимо выплатить часть долга;

– ежегодные выплаты таковы, что сумма долга каждый год уменьшается на одну и ту же величину.

На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что вторая по величине выплата составит 1,8 миллионов рублей?

15.3 15 декабря планируется взять кредит в банке на 26 месяцев. Условия его возврата таковы:
– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца с 1-го по 25-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

– к 15-му числу 26-го месяца кредит должен быть полностью погашен.

Какой долг (в тысячах рублей) будет 15 числа 20-го месяца, если общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 2400 тысяч рублей?

15.4 В июле 2021 года взяли кредит в банке на сумму S млн рублей, где S – целое число, на 4 года. Условия возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей:

Год	2021	2022	2023	2024	2025
Долг (млн руб)	S	0,8S	0,6S	0,3S	0

Найдите наибольшее значение S, при котором каждая из выплат будет меньше 2 млн рублей.

15.5 Вкладчик открыл четырехлетний вклад на сумму S млн рублей (S – целое число). В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его значением в начале года, кроме того в начале третьего и четвертого годов вкладчик добавляет к вкладу по 2 млн рублей. Определите наименьшее возможное значение S, при котором банк за 4 года начислит больше 5 млн рублей.

15.6 В сентябре 2024-го года Владимир Владимирович планирует взять кредит в банке в размере S тысяч рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 20% по сравнению со своим значением в конце предыдущего года;

– с февраля по август необходимо выплатить часть долга;

– в сентябре 2025 и 2026-го года долг должен оставаться S тысяч рублей;

– выплаты в 2027, 2028 и 2029-м годах должны составлять по 432 тысячи рублей;

– к сентябрю 2029-го года долг должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму (в тыс.руб.) выплат за 5 лет.

16.

16.1 В треугольнике ABC длины сторон AB и AC равны 3 и $3\sqrt{7}$ соответственно, а угол ABC равен 60^0. Биссектриса угла ABC пересекается в точке D с окружностью, описанной вокруг треугольника ABC.

а) Докажите, что тангенс угла ACB равен $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

б) Найдите длину отрезка BD.

16.2 В треугольнике ABC биссектриса AD угла A и биссектриса BL угла B пересекаются в точке F. При этом оказалось, что угол LFA равен 60^0.

а) Докажите, что $\angle ACB = \angle LFA$

б) Найдите площадь треугольника ABC, если AB = 2, а $\angle CLD = 45^0$.

16.3 В трапеции KLMN с основаниями KN и LM проведена биссектриса LA угла KLM, точка A – середина отрезка MN. Длина средней линии AB трапеции KLMN равна $\sqrt{5}$, AK = 4.

а) Докажите, что треугольник LAB равнобедренный.

б) Найдите AL.

16.4 Дана трапеция ABCD с основаниями AB и CD. Известно, что $\angle CAB = 2\angle DBA,\ AC = 5,\ BD = 7$.

а) Докажите, что $\cos\angle DBA = \frac{7}{10}$.

б) Найдите площадь трапеции ABCD.

16.5 Четырехугольник PQRS вписан в окружность. Его диагонали PR и QS перпендикулярны и пересекаются в точке M. Известно, что $PS = 13,\ QM = 10,\ QR = 26$.

а) Докажите, что $\frac{PM}{MS} = \frac{5}{12}$.

б) Найдите площадь четырехугольника PQRS.

16.6 В треугольнике ABC расположен прямоугольник PQRS так, что сторона PQ лежит на отрезке AC, а вершины R и S – на отрезках BC и AB соответственно. Известно, что AP = 1, PQ = 5, QC = 2, а периметр треугольника BRS равен 15.

а) Докажите, что $BS : BA = 5 : 8$.

б) Найдите длину отрезка PS.

17.

17.1 Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

$$\frac{(2a+1)x^2 - 2(a+5)x + 18a + 9}{x^2 - 5x + 9} = 3a$$

имеет хотя бы один корень.

17.2 Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

$$\left|x+a^2\right|=\left|a+x^2\right|$$

имеет более трех корней.

17.3 Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

$$\left(a+1-\left|x-1\right|\right)\cdot\left(a+x^2-4x\right)=0$$

имеет четыре различных корня.

17.4 Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

$$3^x-a=\sqrt{9^x-4a}$$

имеет единственный корень.

17.5 Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

$$\left|ax^2+3\right|=\left|2ax\right|+\left|3a\right|$$

имеет хотя бы одно решение.

17.6 Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение

$$(x-a)\sqrt{x+1}=-2x\sqrt{x-a}$$

имеет единственное решение.

18.

18.1 На доске написали несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 462. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры (например, число 17 заменили на число 71).

а) Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в 4 раза больше, чем сумма исходных чисел.

б) Могла ли сумма получившихся чисел быть ровно в 2 раза больше, чем сумма исходных чисел?

в) Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

18.2 а) Приведите пример целого числа n, не кратного 5, при котором дробь $\frac{n^3-n^2+5n}{n^2-n-5}$ сократима.

б) Может ли дробь $\frac{n^3-n^2+5n}{n^2-n-5}$ быть сократимой на 2 при каком-то целом n?

в) Сколько существует натуральных n, не превосходящих 120, при которых дробь $\frac{n^3-n^2+5n}{n^2-n-5}$ сократима?

18.3 Каждое из чисел $a_1, a_2, ..., a_{350}$ равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$S_1=a_1+a_2+...+a_{350}$, $S_2=a_1^2+a_2^2+...+a_{350}^2$,

$S_3=a_1^3+a_2^3+...+a_{350}^3$, $S_4=a_1^4+a_2^4+...+a_{350}^4$.

Известно, что $S_1=569$.

а) Найдите S_4, если $S_2=1307, S_3=3953$.

б) Может ли $S_4=4857$?

в) Пусть $S_4=4785$. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

18.4 Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, ...$ и $b_1, b_2, ...$ состоят из натуральных чисел.

а) Приведите пример таких прогрессий, для которых $a_1b_1+a_3b_3=3a_2b_2$.

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1+2a_4b_4=3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3, если $a_1b_1+2a_4b_4\le 300$?

18.5 Петя умножил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число, и получил произведение, равное *a*. Вася умножил некоторое четное натуральное число на соседнее четное натуральное число и получил произведение, равное *b*.

а) Может ли модуль разности чисел *a* и *b* равняться 8?

б) Может ли модуль разности чисел *a* и *b* равняться 11?

в) Какие значения может принимать модуль разности чисел a и b?

18.6 Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1 000 кг и 60 штук по 1 500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

